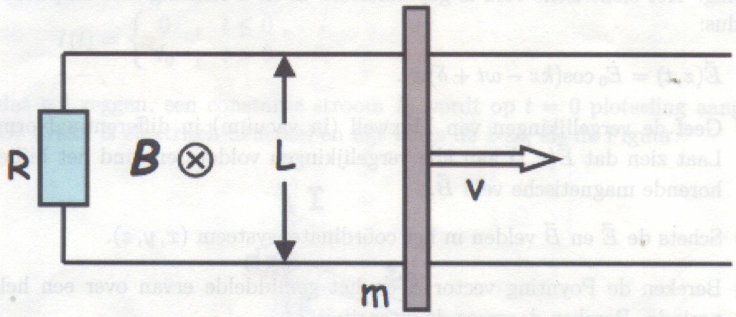
Tentamen Elektriciteit en Magnetisme 2

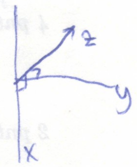
Maandag 26 oktober 2009, 8:30-11:30, tennishal

Voordat je begint, lees het volgende:

- Er zijn 4 sommen met een totaal van 50 punten.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel papier.
- Begin elke som op een nieuw vel papier.
- Onleesbaar handschrift wordt fout gerekend.
- *Succes!*

Som 1 (*40 minuten; 12 punten totaal*)





Een metalen staaf met massa m glijdt zonder wrijving op twee parallelle geleidende rails die op een afstand L staan. De rails worden verbonden door een weerstand R. Het geheel staat in een uniform magnetisch veld $\vec{B}$ dat in de pagina wijst.

3 pnt (a) Geef de integraal-vorm van de wet van Faraday voor de emf. Als de staaf naar rechts beweegt met snelheid v, wat is dan de stroom door de weerstand? In welke richting gaat de stroom?

3 pnt (b) Wat is de magnetische kracht op de staaf? In welke richting?

3 pnt (c) Als de staaf begint met snelheid v_0 op tijd $t = 0$, en gaat glijden, wat is de snelheid op een later tijdstip t?

3 pnt (d) De kinetische energie van de staaf op $t = 0$ is $\frac{1}{2}mv_0^2$. Controleer dat de energie afgegeven aan de weerstand inderdaad precies $\frac{1}{2}mv_0^2$ is.

12

Som 2 (*40 minuten; 13 punten totaal*)

Een vlakke golf met hoek-frequentie ω plant zich in vacuüm voort in de z-richting. Het elektrische veld is gepolariseerd in de x-richting met amplitude E_0, dus:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta)\,\hat{x}\ .$$

4 pnt (a) Geef de vergelijkingen van Maxwell (in vacuüm) in differentiaalvorm. Laat zien dat $\vec{E}(z,t)$ aan alle vergelijkingen voldoet en vind het bijbehorende magnetische veld $\vec{B}$.

2 pnt (b) Schets de $\vec{E}$ en $\vec{B}$ velden in het coördinatensysteem (x, y, z).

3 pnt (c) Bereken de Poynting vector $\vec{S}$ en het gemiddelde ervan over een hele periode. Bereken daarmee de intensiteit $\vec{I}$.

4 pnt (d) Bereken voor deze vlakke golf alle elementen van de Maxwell stress-tensor, gegeven door

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij} B^2 \right)\ .$$

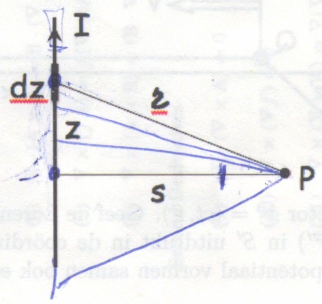
Leg uit waarom je antwoord fysisch gezien te begrijpen valt. Wat is in dit geval het verband tussen de impulsflux-dichtheid en de energie-dichtheid?

Som 3 (*40 minuten; 13 punten totaal*)

Door een oneindig-lange rechte draad loopt een stroom

$$I(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ I_0 & , \quad t > 0 \,; \end{cases}$$

dat wil zeggen, een constante stroom I_0 wordt op $t = 0$ plotseling aangezet. De draad is elektrisch neutraal en ligt langs de z-as, zie de Figuur:



3 pnt (a) De vector-potentiaal in punt P, op afstand s van de draad, ten gevolge van deze niet-statische stroom wordt gegeven door:

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I(t_r)}{\text{ɀ}}\mathrm{d}z$$

$t_r = t - \frac{\text{ɀ}}{c}$

Leg uit wat de fysische betekenis is van de geretardeerde ("retarded") tijd t_r. Druk t_r uit in de tijd t en ɀ.

4 pnt (b) Werk uit welk segment van de draad op tijd t bijdraagt aan de integraal. Bewijs daarmee dat de vector-potentiaal gelijk is aan:

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\ln\left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s}\right)\hat{z}\,.$$

3 pnt (c) Druk de fysische velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ uit in de scalar- en vector-potentialen, V en $\vec{A}$. Bereken $\vec{E}(s,t)$ en $\vec{B}(s,t)$.

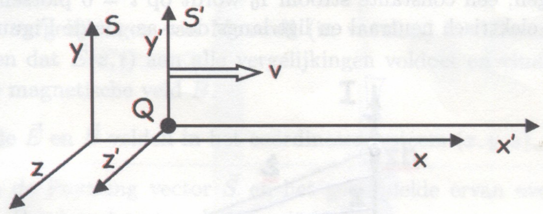
3 pnt (d) Laat zien dat we als $t \to \infty$ de statische velden terugvinden.

Hint:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{s^2 + z^2}} = \ln(\sqrt{s^2 + z^2} + z)$$

Som 4 (*40 minuten; 12 punten totaal*)

We willen de velden berekenen van een puntlading Q die beweegt met constante snelheid v langs de x-as van het laboratorium-systeem S. We beschouwen daarom ook het inertiaal-systeem S' dat met de lading meebeweegt; zie de Figuur:



3 pnt (a) Bekijk de vier-vector $x^\mu = (ct, \vec{r})$. Geef de Lorentz-transformatie die de coördinaten $(ct', \vec{r}')$ in S' uitdrukt in de coördinaten $(ct, \vec{r})$ in S. De scalar- en vector-potentiaal vormen samen ook een vier-vector, de vier-potentiaal:

$$A^\mu = (V/c, \vec{A}) \ .$$

Geef de potentialen in systeem S' uitgedrukt in de potentialen in S.

3 pnt (b) In systeem S' is de lading in rust. Geef V' en $\vec{A}'$ uitgedrukt in $\vec{r}'$. Transformeer nu terug naar S. Geef eerst V en $\vec{A}$ uitgedrukt in $\vec{r}'$ en reken die daarna om naar V en $\vec{A}$ uitgedrukt in t en $\vec{r}$. Laat zien dat $\vec{A} = \vec{v}V/c^2$.

3 pnt (c) Geef aan hoe hieruit de $\vec{E}$ en $\vec{B}$ velden in S uitgerekend kunnen worden. (De berekening zelf hoef je niet te doen.)

3 pnt (d) Controleer dat de vier-potentiaal A^μ voldoet aan de Lorentz-ijk ("Lorentz gauge").

VECTOR DERIVATIVES

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla\times\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Curl : $$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla\times\mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(\nabla f)\cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\tau = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$